MATEMÁTICAS NM TZ2

Variantes de los exámenes según la zona horaria

Para proteger la integridad de los exámenes, cada vez se están utilizando más pruebas de examen que constan de distintas variantes según la zona horaria donde se realicen. Al recurrir a variantes del mismo examen, los alumnos ubicados en una parte del mundo dada no responderán necesariamente al mismo cuestionario de examen que los alumnos ubicados en otras partes del mundo. Se sigue un proceso muy riguroso para garantizar que las diversas variantes de cada examen sean comparables en lo que respecta a su dificultad y a la cobertura del programa de estudios, y se toman las medidas pertinentes para garantizar que se apliquen las mismas normas de calificación a todos los exámenes escritos de los alumnos, independientemente de cuál haya sido la versión del examen que les haya correspondido. Para la convocatoria de exámenes de mayo de 2016, el IB ha elaborado variantes de los exámenes de Matemáticas NM para las distintas zonas horarias.

Límites de calificación de la asignatura

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 16	17 - 34	35 - 46	47 - 58	59 - 69	70 - 80	81 - 100

En las pruebas de examen hubo tres preguntas con cierta ambigüedad en lo que respecta al dominio de algunas de las funciones empleadas. En la pregunta 6 de la prueba 1 se daba un dominio incorrecto, lo cual posibilitaba que hubiera una segunda solución posible. Las preguntas 3 y 9 de la prueba 2 no se habían redactado de la mejor manera posible, puesto que los dominios se habían incluido en la introducción de la pregunta, en vez de mencionarlos en el subapartado posterior en el que se iban a necesitar. En todos estos casos, los examinadores recibieron las instrucciones pertinentes para garantizar que ese hecho no perjudicara a los alumnos. Además, las preguntas se corrigieron antes de publicarse.

Evaluación interna

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 2	3 - 5	6 - 8	9 - 11	12 - 14	15 - 17	18 - 20

Ámbito y adecuación del trabajo presentado

En esta convocatoria de exámenes se presentó una gran variedad de exploraciones, de calidades muy diversas. La mayoría de ellas estaban claramente relacionadas con temas que eran del interés de los alumnos. Como fue el caso en convocatorias anteriores, ciertas áreas temáticas se repitieron: deportes, juegos (juegos de mesa, videojuegos, apuestas), la razón áurea, desciframiento de códigos, películas y música. En algunos casos los trabajos presentados eran exploraciones en toda regla, mientras que en otros el resultado era más que cuestionable porque, viendo el tema elegido, era fácil intuir que el trabajo iba a contener pocos procedimientos matemáticos. En muchas exploraciones se incluía la regresión, aunque el nivel de comprensión de este concepto variaba mucho de unos trabajos a otros. En este sentido, hubo muchos alumnos que se limitaron a utilizar medios tecnológicos para generar ecuaciones y gráficos de regresión, pero no fueron más allá para demostrar su comprensión del tema o explicar por qué se habían decantado por una ecuación de regresión concreta. Hubo otros que trataron de utilizar la prueba de chi-cuadrado, por lo general sin mucho éxito puesto que parecía que ni el alumno ni los profesores entendían bien el proceso. Hubo varias exploraciones donde se arrojaban objetos con la mano o se lanzaban pelotas con el pie y se hacían una modelización y un análisis de las trayectorias que recorrían dichos objetos. En esos casos generalmente se utilizaron modelos simplistas, pero que con frecuencia satisfacían los requisitos y, por ende, podían lograr buenas puntuaciones. Los peores casos fueron aquellas exploraciones que eran simples encuestas de información o un resumen de datos relacionados con un tema dado. Con frecuencia, a los alumnos les costó mostrar un gran compromiso personal o demostrar su comprensión del tema tratado. Fue el caso de los trabajos sobre problemas de lógica, teoría de juegos y temas tales como la razón áurea, la sucesión de Fibonacci, el origen del número e y el conteo de cartas en el juego del blackjack.

Hubo unas cuantas exploraciones, provenientes de colegios concretos, que se parecían mucho unas a otras. Podía ser por tratar el mismo tema, por tener el mismo formato de trabajo pero con distintos números o por seguir el mismo proceso a lo largo de toda la exploración, como si a los alumnos se les hubiera dado una plantilla. En muchos casos quedó patente que el profesor había orientado y guiado en exceso a los alumnos, en vez de dejarles explorar por su cuenta temas de su interés.

Además, algunos alumnos abordaron conceptos matemáticos difíciles que resultaban más apropiados para un nivel superior, y no siempre quedó claro que hubieran entendido realmente lo que habían escrito en su trabajo.

Desempeño de los alumnos en relación con cada criterio

Criterio A

La mayoría de los trabajos estaban organizados —en mayor o menor medida— y constaban de una introducción pertinente, unos fundamentos, un objetivo general y algún tipo de conclusión, aunque en ocasiones hubiera problemas de coherencia. Hubo algunos alumnos que dieron por hecho que el lector contaba con unos conocimientos determinados y dejaron muchos pasos sin explicar. Con frecuencia, el objetivo general resultaba demasiado vago (por ejemplo, "Mi objetivo es averiguar más cosas acerca de..."). Eso hacía que la exploración resultara en ocasiones confusa, dado que la conclusión no se podía enlazar con el objetivo general concreto. La mayoría de los alumnos eran conscientes de la necesidad de incluir citas y una lista de referencias, pero persiste el problema de no citar las fuentes de las imágenes y los datos cuando aparecen en el cuerpo del trabajo (no es un fallo que se penalice en este criterio, pero sí afecta a la organización y, además, es un requisito para todas las exploraciones). A los alumnos más flojos les cuesta redactar trabajos que se puedan considerar completos, mientras que a los mejores alumnos les cuesta más elaborar exploraciones concisas. Tiene que haber un equilibrio ente esos dos descriptores, lo cual constituye todo un desafío para los alumnos de este nivel. Por ejemplo, no es necesario repetir una y otra vez los cálculos más largos. Tampoco resulta apropiado incluir, en una exploración matemática, una guía de cómo se utiliza un software concreto.

Criterio B

Este criterio, por lo general, lo entendieron bien tanto los profesores como los alumnos. La mayoría de los alumnos fueron capaces de escoger representaciones matemáticas apropiadas y de utilizar la terminología de una forma adecuada. También demostraron un buen dominio de la tecnología informática a la hora de generar gráficos y ecuaciones. Algunos de los problemas más habituales fueron: gráficos sin rotular o mal rotulados, términos que habían quedado sin definir y el uso de notación de calculadora en el texto. Hubo unos pocos alumnos que se esforzaron a conciencia por redactar el trabajo de un modo que les permitiera no tener que incluir ningún tipo de notación matemática. Este enfoque no resulta propicio para obtener una buena puntuación en presentación matemática.

Criterio C

Muchos alumnos mencionaron expresamente que tenían un interés personal por el tema elegido. En ocasiones, ese fue todo el compromiso personal presente en el trabajo. El hecho de que un alumno se muestre interesado por el tema general del trabajo no implica necesariamente que vaya a obtener una puntuación alta en este criterio. El trabajo en sí debe contener pruebas del compromiso del alumno. Es poco probable que uno de los típicos "problemas de investigación/de libro de texto" logre un nivel alto en el Criterio C, a menos que el alumno lo amplíe haciéndose preguntas del tipo "¿Qué sucedería si...?". Elegir un tema que esté por encima del nivel del curso no se considera, por sí solo, un "compromiso personal" excepcional, si bien es cierto que aprender nuevos conceptos matemáticos es uno de los aspectos que pueden tenerse en cuenta en este criterio. En algunas exploraciones sobre modelización y estadística, los alumnos desaprovecharon oportunidades claras de demostrar una mayor independencia, creatividad o interés personal mediante el diseño y la obtención de sus propios datos primarios, en vez de limitarse a utilizar conjuntos de datos secundarios estándar.

Criterio D

Algunos alumnos hicieron un esfuerzo ímprobo por ir reflexionando sobre los resultados, a medida que iban apareciendo, y sobre lo que significaba cada bloque de cálculos o de deducciones en el contexto de los objetivos generales. Los mejores trabajos utilizaron dicha reflexión a modo de guía para los pasos siguientes del proceso de análisis. Muchos alumnos dejaron las reflexiones para el final, e incluso dedicaron un subapartado exclusivamente a plasmar dichas reflexiones. Reflexionar debería ser más que limitarse a reformular las conclusiones halladas. Con frecuencia, esas conclusiones eran escasas o demasiado superficiales. Los alumnos, en vez de limitarse a resumir los resultados, también se pueden plantear cuáles son las limitaciones y las posibles ampliaciones de su investigación, cuáles son las ventajas y los inconvenientes relativos de los enfoques que han elegido y qué perspectivas alternativas se podrían adoptar sobre el tema. Una reflexión crítica ha de incluir una discusión de los resultados matemáticos obtenidos, situándolos en el contexto del tema elegido.

Criterio E

Algunos alumnos abordaron temas que claramente no se correspondían con el curso de Matemáticas NM y que provenían de los conocimientos previos; hubo otros que eligieron temas para los que era necesario recurrir a procedimientos matemáticos complicados que estaban por encima de su nivel de comprensión. Los modelos de regresión se abordaron habitualmente utilizando medios tecnológicos y sin demostrar mucha comprensión del tema, al no quedar claro por qué el alumno había escogido un modelo de regresión determinado o por qué consideraba que dicho modelo resultaba adecuado. Otro defecto habitual en la exploración fue el uso y la aplicación de fórmulas complejas, pero sin aportar pruebas que demostraran que el alumno comprendía cómo funcionaban dichas fórmulas y por qué eran las adecuadas. El nivel máximo de este criterio (una nota de seis) sigue siendo difícil de alcanzar. En ocasiones, los profesores concedieron este nivel a trabajos que contenían errores considerables que aparentemente habían pasado desapercibidos. Este hecho resulta preocupante. Somos conscientes de que es complicado verificar minuciosamente todas las exploraciones para detectar posibles errores matemáticos, teniendo en cuenta que cada alumno tiene un tema distinto, pero es importante que los profesores se esfuercen al máximo por conseguirlo. Uno de los principales factores que permiten discriminar entre los distintos niveles de logro es el grado de comprensión que queda patente al leer el trabajo del alumno. No es el grado de dificultad lo que se evalúa en este criterio, sino el nivel de comprensión del alumno.

Recomendaciones para la enseñanza de futuros alumnos

Por lo general, los alumnos necesitan una mayor exposición a la matemática exploratoria antes de poder asignarles una exploración para la evaluación interna. A medida que se van introduciendo conceptos en clase quizá haya lugar para realizar exploraciones breves o actividades que permitan a los alumnos aprender lo que significa explorar y entender bien el propósito de cada criterio. A su vez, es posible que eso anime a los alumnos a buscar temas nuevos y novedosos, en vez de recurrir a temas bien conocidos procedentes de textos matemáticos u otras fuentes. Antes de decantarse por un tema concreto, a los alumnos se les debería dar la oportunidad de leer algunos de los trabajos que mejores notas lograron en el pasado, que se encuentran en el material de ayuda al profesor. Antes de aprobar el tema elegido, los profesores podrían por ejemplo retar a los alumnos a que expliquen ellos solos qué procedimientos matemáticos van a llevar a cabo. Los profesores tienen que asegurarse de que los alumnos vayan cumpliendo los plazos internos y de que los primeros borradores que elaboren reciban los comentarios pertinentes. Las exploraciones mal planificadas no suelen lograr buenas puntuaciones en los distintos criterios de evaluación. Los alumnos podrían enseñar a sus compañeros los nuevos conceptos y procedimientos matemáticos que estén tratando de explorar o aprender, para así darse cuenta de hasta qué punto los entienden realmente y de qué tipo de preguntas podrían surgir. Podrían luego utilizar ese enfoque inicial en su exploración.

Recomendaciones adicionales relacionadas con los criterios de evaluación:

- Es necesario explicar mejor la noción de coherencia, tanto a los profesores como a los alumnos. Los elementos del trabajo no pueden aparecer simplemente "de la nada". A la hora de redactar el trabajo, los alumnos deben incluir comentarios o una interpretación pertinente con cada resultado o método presentado.
- Hay que recalcar la importancia de tener un objetivo general claro, puesto que esto puede contribuir a que la exploración, en su conjunto, sea mejor.
- Se recomienda a los colegios que enseñen expresamente a sus alumnos a utilizar una de las muchas herramientas disponibles (gratuitas o de pago) para generar correctamente expresiones con notación matemática y gráficos.
- Hay que alentar a los alumnos a que aborden conceptos y procedimientos matemáticos que estén dentro de los límites de su capacidad de comprensión. Utilizar conceptos matemáticos más avanzados pero que apenas entiendan no les va a ayudar a obtener una buena nota.

Comentarios adicionales

- Pedimos encarecidamente a los profesores que aporten toda la información de contexto que se solicita. También es fundamental que anoten las puntuaciones concedidas directamente en el trabajo del alumno. De manera similar, resultaría de gran utilidad que los profesores añadieran comentarios detallados sobre cada uno de los criterios. Los comentarios que los profesores escriban a mano en el trabajo del alumno también tienen que ser claros y, preferiblemente, legibles.
- Es aparentemente mucho menos probable que los moderadores decidan modificar las puntuaciones que han concedido los profesores en aquellos colegios en los que los profesores escriben comentarios concretos tanto en los formularios 5/EXCS como en

el propio trabajo del alumno. Además, los profesores que operan así dan la impresión de haber comprendido mejor los criterios, y las anotaciones realizadas también ayudan a los moderadores a entender mejor los razonamientos del profesor.
- A pesar de todo eso, sigue habiendo algunos colegios que envían muestras con muy pocas anotaciones en los trabajos o incluso con ninguna. Según los formularios de comentarios remitidos en el pasado, no cabe duda de que quienes insisten en hacer pocas anotaciones dificultan notablemente las labores de moderación.

Prueba 1

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 14	15 - 29	30 - 40	41 - 50	51 - 60	61 - 70	71 - 90

Comentarios generales

En su conjunto, los alumnos estaban bien preparados para afrontar esta prueba de examen. Hubo un par de excepciones a este patrón general, que se comentarán en detalle en este informe. La mayoría de los alumnos fueron capaces de abordar con bastante acierto todas las preguntas y en cada una de ellas consiguieron al menos algunos de los puntos que había en juego. Los alumnos mejor preparados obtuvieron notas muy altas en esta prueba de examen.

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- El efecto de aplicar un cambio constante a un conjunto de datos
- Trabajar con vectores y el concepto de vector unitario
- Darse cuenta de la relación que existe entre un diagrama de árbol y la probabilidad condicionada
- Resolver integrales utilizando el método de sustitución o el de comparación
- Reconocer identidades trigonométricas

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

- Funciones cuadráticas y resolución de ecuaciones de segundo grado
- Probabilidad simple, especialmente cuando había que utilizar diagramas de árbol y diagramas de Venn
- Progresiones geométricas
- Propiedades de los logaritmos

- Funciones compuestas

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas

Pregunta 1: Función cuadrática

Casi todos los alumnos obtuvieron una buena nota en esta pregunta, logrando la máxima puntuación en los tres apartados de los que constaba. En el apartado (b) hubo algunos alumnos que supieron descomponer correctamente en factores la expresión cuadrática, pero que luego dieron valores negativos de a y de b.

Pregunta 2: Media y varianza de un conjunto de datos

La mayoría de los alumnos fueron capaces de resolver correctamente el apartado (a), pero en el apartado (b) no hubo tantos aciertos. Parece que en muchos colegios se saltaron el apartado del programa de estudios de Matemáticas NM que aborda el "efecto que se obtiene al modificar los datos originales aplicando un cambio constante".

Pregunta 3: Logaritmos

La mayoría de los alumnos fueron capaces de lograr algunos o todos los puntos que había en juego en esta pregunta. Casi todos los alumnos respondieron correctamente el apartado (a). En el apartado (b), la mayoría de los alumnos se dieron cuenta de que tenían que descomponer 45 en factores, aunque luego algunos no aplicaron correctamente las propiedades de los logaritmos y no obtuvieron la máxima puntuación a la que se podía optar aquí.

Pregunta 4: Progresión geométrica y resolución de una ecuación cuadrática (de segundo grado)

Casi todos los alumnos intentaron plantear una expresión, o un par de expresiones, donde apareciera la razón común de la progresión geométrica. Esas expresiones, si se habían planteado correctamente, conducían a una ecuación cuadrática (de segundo grado) que muchos de los alumnos supieron resolver acertadamente.

Pregunta 5: Trigonometría

En el apartado (a) de esta pregunta, la gran mayoría de los alumnos sustituyeron correctamente los valores del enunciado en la fórmula del área de un triángulo, aunque algunos cometieron errores algebraicos que les impidieron simplificar la ecuación y llegar hasta $sen\mathrm{A\hat{B}C} = \frac{1}{2}$. Lamentablemente, algunos de los alumnos que llegaron hasta aquí luego no supieron decir cuáles eran los ángulos cuyo seno tenía ese valor.

En el apartado (b), muchos alumnos se dieron cuenta de que $\mathrm{C\hat{B}D}$ era el ángulo suplementario de $\mathrm{A\hat{B}C}$. Sin embargo, llegados a este punto hubo muchos alumnos que sustituyeron $30°$ (o el ángulo erróneo arrastrado del apartado anterior, en grados) en la fórmula del área del sector circular que aparece en el cuadernillo de fórmulas, sin entender que esta fórmula solo vale si el ángulo se da en radianes.

Pregunta 6: Funciones compuestas e identidades trigonométricas

En el apartado (a), casi todos los alumnos hallaron correctamente la función compuesta en función de $\cos x$, aunque muchos de ellos no lograron avanzar más allá de ese paso inicial. A pesar de que algunos alumnos sí que parecieron darse cuenta de que había que recurrir a las identidades trigonométricas, casi ninguno logró dar con la expresión correcta en la forma que se pedía en el enunciado. En el apartado (b) hubo muy pocos alumnos que dijeran correctamente cuál era el recorrido de la función.

Pregunta 7: Vectores

La mayoría de los alumnos se dieron cuenta de que el producto escalar de los vectores tenía que ser igual a cero. Sin embargo, algunos de ellos no calcularon correctamente el producto escalar porque no emparejaron y multiplicaron los componentes que correspondían de los vectores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Además de todo esto, la mayoría de los alumnos no aprovecharon el hecho de que el modulo del vector unitario $\boldsymbol{v}$ es igual a 1. De entre los pocos alumnos que lograron hallar acertadamente los valores de m y/o de n, hubo algunos que no presentaron con claridad los pares de valores que tenían que dar como respuesta.

Pregunta 8: Probabilidad

En su conjunto, los alumnos obtuvieron muy buena nota en esta pregunta; de hecho, la mayoría de ellos lograron casi todos los puntos que había en juego. El error más habitual se vio en el subapartado (c)(ii), donde muchos de los alumnos no lograron el punto al que podían optar. También es interesante observar que muchos de los que resolvieron correctamente este subapartado obtuvieron la respuesta aplicando la fórmula de la probabilidad condicionada, en vez de darse cuenta de que la probabilidad que les pedían aparecía ya escrita en la segunda rama del diagrama de árbol.

Pregunta 9: Análisis

Hubo muchos alumnos que resolvieron correctamente el apartado (a) de esta pregunta, aunque algunos parecía que habían trabajado “hacia atrás” (es decir, partiendo de la expresión del área dada en el enunciado), que no es lo que se pretende en una pregunta de tipo “mostrar que”. En el apartado (b) hubo muchos alumnos que hallaron la derivada correcta, pero algunos de ellos lo lograron utilizando métodos enrevesados y engorrosos, como la regla del cociente, en vez de utilizar la regla de la potencia, que es más sencilla.

Resultó decepcionante comprobar cuántos alumnos no se dieron cuenta de que la derivada que acababan de hallar en el apartado (b) tenía que ser igual a cero para que el área de la superficie alcanzara un valor mínimo. De entre aquellos alumnos que sí plantearon que la derivada tenía que ser igual a cero, la mayoría fueron capaces de hallar correctamente la altura que se pedía en el enunciado.

En el apartado (d) de esta pregunta hubo una serie de errores aritméticos que impidieron a los alumnos hallar el área correcta. El error más habitual, con diferencia, fue no darse cuenta de que el número de latas adquiridas tenía que ser un número entero.

Pregunta 10: Análisis

Como suele suceder con la pregunta 10 de todas las pruebas, esta constituyó un desafío considerable para muchos de los alumnos. En el apartado (a), aunque muchos sí que parecían ser conscientes de que existía una relación entre la derivada dada en el enunciado y la pendiente de la recta tangente, la mayoría no sustituyeron la x de la fórmula por cero y, por ende, fueron incapaces de hallar la pendiente correcta de la recta.

En el apartado (b), aunque prácticamente todos los alumnos sabían que el área era igual a la integral de f entre 0 y a, muy pocos fueron capaces de hacer la integral correctamente utilizando el método de sustitución o el de comparación. Hubo muchos alumnos que ni siquiera trataron de integrar, deteniéndose justo después de escribir la expresión de la integral.

En el apartado (c), la mayoría de los alumnos partieron de una expresión correcta para calcular el área del triángulo, como $\frac{ab}{2}$. Sin embargo, hubo muy pocos que supieran sustituir la expresión de b que habían calculado en el subapartado (a)(ii), lo cual les impidió a muchos hallar el valor de k.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

Los profesores y los alumnos han de estar familiarizados con la *Guía de Matemáticas NM* que está vigente, especialmente en lo que respecta al contenido del programa de estudios y a la lista que contiene la notación empleada. Queda patente que, en algunos colegios, hay áreas del programa de estudios que no se están impartiendo.

Tanto los alumnos como los profesores tienen que estar familiarizados con las pautas de calificación que se siguen a la hora de corregir las pruebas y con los términos de instrucción que se utilizan en estas pruebas de examen. Por ejemplo, en una pregunta que contenga el término de instrucción “halle”, los alumnos deberían incluir algún tipo de desarrollo en su respuesta. Si un alumno se limita a escribir la respuesta final, sin incluir su desarrollo, es probable que pierda puntos, incluso si su respuesta es correcta. En aquellas preguntas que contengan el término de instrucción “muestre que...”, se espera de los alumnos que muestren realmente cómo se llega hasta el resultado dado en el enunciado. No deberían limitarse a sustituir un valor dado en una fórmula y a mostrar que “funciona”. Es obvio que esa respuesta va a “funcionar”, puesto que se les ha proporcionado en el enunciado y se les ha dicho que es la respuesta correcta.

Como se ha dicho otras veces, los alumnos deberían mostrar siempre todo el desarrollo del ejercicio y de una manera bien presentada y ordenada. Debería quedar perfectamente claro a qué pregunta y a qué parte de esta corresponde cada desarrollo, y los cálculos y los razonamientos deben incluirse en el lugar en el que se vayan a utilizar. Además de todo esto, hay que decirles a los alumnos que simplemente tachen todos aquellos desarrollos que sean incorrectos y que no quieran que tengan en cuenta los examinadores. Cuando un alumno utilice un método no válido, o cuando su desarrollo contenga errores que no se hayan tachado, ese trabajo se considerará parte de la respuesta, aunque haya cambiado a un método distinto en un momento posterior del desarrollo.

Para terminar, se debe exponer a los alumnos a exámenes del IB de convocatorias anteriores, y deberían practicar tratando de resolver esas pruebas en condiciones realistas de examen. Eso les permitirá familiarizarse con el formato de las pruebas, aprender a gestionar adecuadamente el tiempo del que disponen y practicar cómo plasmar el desarrollo de los ejercicios de una manera organizada en ambas secciones de la prueba.

Prueba 2

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 18	19 - 37	38 - 46	47 - 55	56 - 63	64 - 72	73 - 90

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

La mayoría de los alumnos trataron de responder a todas las preguntas del examen, aunque en algunos centros parece que había determinadas áreas del programa de estudios que les resultaron especialmente difíciles a los alumnos:

- Reconocer la necesidad de hallar el período de una función trigonométrica en un contexto dado
- El concepto de sucesos independientes
- Los problemas de cinemática
- El uso de la regla de la cadena para hallar la derivada de una función que contiene una exponencial
- A la hora de representar gráficamente una función, tener en mente cuál es el dominio de dicha función
- Utilizar la calculadora de pantalla gráfica para resolver una ecuación que no se

resuelva fácilmente por métodos algebraicos
- Los porcentajes y su relación con las progresiones geométricas
- Saber identificar cuándo un problema tiene más de una solución

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Los siguientes temas los comprendían bien un número significativo de alumnos:

- Progresiones aritméticas
- Indicar el número de términos que tiene el desarrollo de la potencia de un binomio
- Emplear la calculadora de pantalla gráfica para hallar los cortes con los ejes y para dibujar aproximadamente curvas sencillas
- Las relaciones trigonométricas en triángulos no rectángulos
- La regresión lineal con ayuda de la calculadora de pantalla gráfica
- La geometría de vectores: módulo, ecuación vectorial de una recta y vectores de posición
- El empleo de la calculadora de pantalla gráfica para hallar la probabilidad de una distribución normal

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas

Pregunta 1: Progresiones aritméticas

A la mayoría de los alumnos esta pregunta les resultó sencilla y asequible. Supieron hallar la diferencia común y la sustituyeron correctamente en la fórmula del término n-ésimo y de la suma de los n primeros términos, respectivamente.

Pregunta 2: Teorema del seno y teorema del coseno

La mayoría de los alumnos resolvieron correctamente el apartado (a), dándose cuenta de que era necesario recurrir al teorema del seno.

En el apartado (b), algunos se percataron de que había que utilizar el teorema del coseno, pero luego sustituyeron los valores de manera incorrecta. Hubo unos pocos que, en el apartado 2(b), utilizaron el teorema de Pitágoras o enfoques demasiado largos y engorrosos basados en el teorema del seno.

Algunos alumnos utilizaron la calculadora en modo grados en lugar de en modo radianes, sin darse cuenta de que los ángulos dados en el enunciado estaban en radianes.

Pregunta 3: Dibujo aproximado de gráficos

En el apartado (a), la mayoría de los alumnos supieron hallar correctamente los puntos de corte con los ejes x e y, pero luego muchos de ellos erraron a la hora de escribir la asíntota horizontal como una ecuación. Algunos alumnos, a la hora de indicar cuál era la asíntota horizontal, respondieron $y \neq -2$.

En cuanto al apartado (b), hubo un número considerable de alumnos que fueron capaces de dibujar aproximadamente la función exponencial, dotándola de una forma más o menos correcta, aunque muchos de ellos no emplearon el dominio correcto y extendieron el gráfico más allá de x = 4. Otros marcaron en el gráfico un valor incorrecto de y en el punto x = 4, lo cual les hizo perder un punto.

Teniendo en cuenta que en esta pregunta lo único que tenían que hacer los alumnos era copiar el gráfico de la pantalla de la calculadora de pantalla gráfica, es importante recalcar cuáles son las características que no se les puede olvidar señalar.

Pregunta 4: Funciones trigonométricas

Los alumnos hicieron bastante bien el apartado (a). La mayoría de ellos sustituyeron correctamente pero dieron por hecho que $\cos 0 = 0$, lo cual los llevó a concluir (erróneamente) que la respuesta era 17.

La mayoría de los alumnos eran conscientes de que tenían que resolver $h(t) = 20$, pero no fueron capaces de hacerlo. Un número considerable de alumnos trataron de resolver la ecuación con un método algebraico; los errores más habituales fueron obtener $\cos k = \frac{-0.2}{1.2}$ o $k = \frac{-3}{15\cos 1{,}2}$.

El apartado (c) resultó ser complicado, puesto que a muchos alumnos les costó darse cuenta de que tenían que hallar el período de la función. Además, muchos de los que supieron hallarlo no redondearon luego la respuesta final a un lugar decimal.

Pregunta 5: Desarrollo de la potencia de un binomio

A pesar de que les costó un poco, el objetivo de esta pregunta era evaluar la destreza de los alumnos en el uso del teorema del binomio como método para hallar el coeficiente de uno de los términos del desarrollo.

En el apartado (a), la mayoría de los alumnos se dieron cuenta de que el desarrollo constaba de 11 términos, aunque hubo unos pocos que respondieron que tenía 10.

En cuanto al apartado (b), hubo muchos alumnos que lo trataron de resolver y sabían lo que tenían que hallar. Sin embargo, la ejecución del plan no siempre fue acertada. Un buen número de alumnos se liaron con las potencias de los factores del término requerido y solo pudieron obtener el primer punto de método por haber elegido un enfoque válido. Algunos alumnos dieron el término (en lugar del coeficiente) como respuesta final. Unos pocos alumnos trataron de desarrollar el binomio por métodos algebraicos y hubo también alumnos aislados que sumaron en vez de multiplicar, con lo cual perdieron todos los puntos posibles.

Pregunta 6: Distribución normal y sucesos independientes

El primer apartado de esta pregunta requería la aplicación directa de la distribución normal y la mayoría de los alumnos que lo abordaron obtuvieron el valor correcto. En algunos casos, los alumnos dieron la respuesta con dos cifras significativas o incluso con una, lo cual les llevó a perder un punto y les hizo correr el riesgo de obtener una respuesta incorrecta en el siguiente apartado de la pregunta.

El apartado (b) resultó ser todo un reto por diversos motivos. Muchos de los alumnos no se dieron cuenta de que 0,01 era la probabilidad de una intersección. Otros no sabían cómo hallar la probabilidad aprovechando el hecho de que los sucesos eran independientes. Algunos alumnos creían que la fórmula, en el caso de sucesos independientes, era $P(A)+P(B)=0.01$ en vez de $P(A)\times P(B)=0.01$.

De entre aquellos que fueron capaces de hallar el valor correcto de $P(R<x)$, solo algunos prosiguieron hasta hallar el correspondiente valor de x.

El redondeo prematuro a la hora de resolver el apartado (a) en ocasiones provocó que el punto final de (b) se perdiera innecesariamente.

Pregunta 7: Cinemática

La mayoría de los alumnos se dieron cuenta de que tenían que calcular la integral de la velocidad, y además lo hicieron correctamente. Sin embargo, solo unos pocos se percataron de que había dos posiciones posibles para la partícula, puesto que esta se puede mover en los dos sentidos a lo largo de la línea recta. Por lo general, la única ecuación que escribieron los alumnos fue $3p^2-6p=2$, que conduce a soluciones que están fuera del dominio dado en el enunciado. Los alumnos no consiguieron distinguir los conceptos de desplazamiento y distancia recorrida.

Pregunta 8: Regresión lineal y progresión geométrica

A pesar de que la pregunta hablaba de la ecuación de regresión, hubo unos pocos alumnos que trataron de hallar los valores de *a* y de *b* planteando dos ecuaciones con las coordenadas de dos puntos tomados de la tabla. Hubo un número considerable de alumnos que no escribieron el valor del coeficiente de correlación o que dieron uno incorrecto. Puede ser que, en algunas calculadoras de pantalla gráfica, una de las herramientas (Diagnóstico) estuviera desactivada.

El apartado (b) se resolvió en general bien, y muchos alumnos obtuvieron puntos pese al error que arrastraban. A algunos les costó redondear la respuesta al múltiplo de 100 dólares más cercano.

El apartado (c) se abordó de dos maneras distintas. Una fue darse cuenta de que la tasa correcta era 0,95 y hallar luego el precio del coche al cabo de seis años. Algunos de esos alumnos utilizaron una fórmula parecida a la que se emplea para hallar el n-ésimo término de una progresión geométrica ($P \times (tasa)^{t-1}$), pero sustituyeron t por 6 y, por lo tanto, obtuvieron un resultado incorrecto.

Otro enfoque fue ir calculando los seis valores (del precio del coche) hasta obtener la respuesta que se pedía. En los casos en los que se empleó este método, el problema surgió cuando se utilizaron resultados intermedios con un grado de precisión menor de lo debido, lo cual hizo que los cinco primeros valores del coche que obtuvieron no fueran correctos.

Muchos alumnos o bien dejaron sin responder los apartados 8(c) y 8(d) o multiplicaron $0.05 \times 6 \times 16100$ o $0.95 \times 6 \times 16100$ y no se percataron de que la respuesta carecía de sentido. Otros alumnos trataron de utilizar la fórmula de la suma de una serie geométrica.

El apartado (d) lo abordaron empleando un enfoque gráfico y también analítico, utilizando logaritmos para hallar el año en el que Lina vendería el coche. Sin embargo, muchos de los alumnos no consiguieron dar con el año correcto. “En el noveno año” o “en 2020” fueron algunas de las respuestas que se vieron con frecuencia. Lo mismo sucedió con aquellos alumnos que utilizaron una tabla de valores y hallaron el precio del coche al cabo de nueve años y de diez años. Habría que recordarles a esos alumnos que, para que el método de la tabla sea válido, han de mostrar los valores originales que se combinan para generar los valores “de cruce”.

Pregunta 9: Análisis

Por lo general, los alumnos supieron resolver bien el apartado (a). Muchos alumnos perdieron los puntos que había en juego por responder 2 o $y \neq 2$, en lugar de $y = 2$.

En el apartado (b), algunos alumnos se liaron y hallaron $f^{-1}(x)$ en lugar de $f'(x)$. A la hora de calcular la derivada, se vieron dos tipos de enfoques distintos. La mayoría de los que reescribieron la función como $f(x) = (x-1)^{-1} + 2$ aplicaron luego correctamente la regla de la cadena. Aquellos que trataron de aplicar la regla del cociente cometieron diversos errores: al calcular la derivada de una constante, al multiplicar por cero, al hacer la resta en el numerador en el orden incorrecto o por omitir el signo menos en la respuesta.

En el apartado (c), la mayoría de los alumnos fueron coherentes y obtuvieron el mismo valor que habían escrito en el apartado (a).

En el apartado (d) hubo muchos alumnos que no consiguieron derivar correctamente la función g. Aquellos que sí fueron capaces de hallar la derivada por lo general también fueron capaces de resolver la ecuación por métodos algebraicos.

En cuanto al apartado (e), no hubo muchos alumnos que supieran plantear una ecuación correcta con las derivadas. En esta pregunta, el desempeño de los alumnos fue muy variado, dado que aquellos que sabían que tenían que utilizar la calculadora de pantalla gráfica lograron obtener una respuesta, mientras que muchos otros se liaron por el camino al tratar, infructuosamente, de resolver la ecuación algebraicamente. Muchos alumnos trataron de resolver ecuaciones bastante complejas “a mano”, en vez de representar gráficamente las expresiones en la pantalla de la calculadora y hallar cuál era el valor de x en el punto de intersección. De entre aquellos alumnos que optaron por un enfoque gráfico, solo un pequeño porcentaje llegó a esbozar en la hoja de respuesta las dos curvas con las que estaba trabajando. Ese dibujo aproximado les resulta particularmente útil a los examinadores, para poder entender cómo piensa el alumno o qué pasos da para resolver las ecuaciones.

Solo unos pocos alumnos se dieron cuenta de que la pregunta pedía el gradiente, que es igual a la coordenada *y* del punto de intersección, no a su coordenada *x*.

Pregunta 10: Vectores, ecuación vectorial y relaciones entre módulos

Los apartados (a) y (b) los abordaron la gran mayoría de los alumnos y se vieron enfoques apropiados que obtuvieron al menos los puntos de método.

El apartado (c) por lo general también se resolvió bien, aunque muchos de los alumnos escribieron la ecuación de la recta como $L = a + tb$, lo cual les hizo perder punto.

El apartado (d) también lo resolvieron bien la gran mayoría de los alumnos. Incluso aquellos que habían fallado en el apartado (a) pudieron obtener aquí todos los puntos.

El apartado (e) resultó ser el más complicado de toda la prueba de examen. Para muchos, el gran problema estuvo en plantear la ecuación $\sqrt{117} = \sqrt{52t^2}$ y, por lo tanto, darse cuenta de que D podía tener dos posiciones distintas.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza de alumnos futuros

Asegúrese de que los alumnos estén expuestos a pruebas de examen de convocatorias anteriores del IB, de modo que conozcan los tipos de preguntas que se hacen y el nivel que se requiere en las respuestas.

Insista en que es necesario mostrar el desarrollo del ejercicio, para que quede patente el método que se ha utilizado.

Hay que enseñar a los alumnos a evitar el redondeo prematuro de las respuestas intermedias y a arrastrar más de cuatro cifras significativas a lo largo de todo el desarrollo del ejercicio.

Los alumnos han de leer con detenimiento las preguntas y seguir las instrucciones concretas que se incluyen en el enunciado. Por ejemplo, dar una respuesta final con el grado de precisión que se indicaba en los apartados 4(c) y 8(b) o dar un coeficiente, en vez del término completo, en el 5(b).

Los alumnos tienen que practicar el dibujo aproximado de curvas, incluso en aquellos casos en los que se permita utilizar una calculadora de pantalla gráfica. En particular, los alumnos deben aprender a restringir los gráficos al dominio dado y a mostrar sus características fundamentales, como los cortes con los ejes y el comportamiento asintótico. Para ello, es necesario que los alumnos alcancen una comprensión más profunda y conceptual de lo que hacen con la calculadora. No se trata solo de saber qué botones tienen que apretar sino que, sobre todo, deben saber para qué los pulsan. Da la impresión de que dependen demasiado de los programas de la calculadora de pantalla gráfica y demasiado poco de su propia comprensión y aplicación de lo aprendido.

Haga hincapié en que la calculadora de pantalla gráfica se puede utilizar para resolver la mayoría de las ecuaciones pero que ES OBLIGATORIO utilizarla en aquellas ecuaciones donde se iguale una función trascendente a una función polinómica o racional. Asimismo, a la hora de dibujar un gráfico, los alumnos deben restringir la ventana del gráfico a los límites del dominio dado, de modo que ni siquiera tengan la tentación de dar soluciones que estén fuera de dicho dominio.

Los profesores deben recalcarles a los alumnos que es importante que comprueben en qué modo tienen la calculadora, para que cuando trabajen con ángulos o con funciones trigonométricas sepan si están usando radianes o grados. Los alumnos también han de ser conscientes de que quizás tengan que pasar de un modo a otro durante el examen, si las preguntas lo requieren. Es importante recordar a los alumnos que es necesario activar el diagnóstico después de restablecer (*reset*) las calculadoras modelo TI84 y que las calculadoras de pantalla gráfica están por defecto en modo radianes después del restablecimiento.

Haga hincapié en la necesidad de presentar los ejercicios con claridad y de rotular cada subapartado de una pregunta que se vaya a responder.

Los alumnos deberían estar familiarizados con todos los elementos de los que consta la *Guía de Matemáticas NM*, incluidos los distintos términos de instrucción (escribir, hallar, calcular...).